

Cours – Séquence n° 6 – FONCTIONS (II) : compléments dérivation, convexité, point d'inflexion

I- RAPPELS SUR LA DÉRIVATION

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $a + h \in I$.

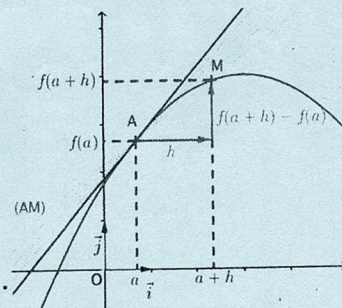
- On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ tend vers un nombre réel } l \text{ lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$

- Dans ce cas, ce nombre réel l est appelé le **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$.

$$\text{On a donc } f'(a) = l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- La tangente à la courbe de f au point $A(a; f(a))$** est la droite passant par le point A et de coefficient directeur $f'(a)$.
- On dit que **f est dérivable sur I** si f est dérivable en tout réel a de I .
- La fonction dérivée de f sur I** est la fonction qui, à tout réel x de I , associe $f'(x)$.



Propriété : équation de la tangente

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La tangente à la courbe de f au point $A(a; f(a))$ est la droite d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Propriétés : formules de dérivation des fonctions usuelles

Fonction f	Ensemble de définition de f	Ensemble de dérivabilité de f	Dérivée f'
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$

Propriétés : formules d'opérations sur les fonctions dérivables

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , alors :

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriétés : application de la dérivation au sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est croissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I $f'(x) \geq 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tout x de I $f'(x) \leq 0$.
- La fonction f est constante sur I si, et seulement si, pour tout x de I $f'(x) = 0$.

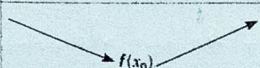
Remarques

1. Si, pour tout réel x de I , $f'(x) > 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points où f s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
2. Si, pour tout réel x de I , $f'(x) < 0$, sauf peut-être en un nombre fini de points où f s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

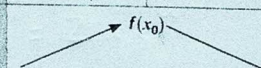
Propriétés : dérivée et extremum local

Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un nombre réel de I .

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

x	x_0		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$f(x_0)$ est un minimum local.

x	x_0		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$f(x_0)$ est un maximum local.

II- DERIVEE DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS ET NOUVELLES DÉRIVÉES

Propriété (admise) : dérivée de la composée de deux fonctions

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I , on ait $u(x) \in J$.

Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J , alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x de I , $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Exemple

u est la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$. v est la fonction définie sur $J =]0; +\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$, donc $x^2 + 1 \in]0; +\infty[$.

Donc la fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- u est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et v est dérivable sur $J =]0; +\infty[$, donc la fonction $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Propriétés (conséquences) : nouvelles dérivées

Soient u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n est un entier relatif non nul.

Fonction	Condition supplémentaire sur la fonction u	Dérivée
$\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	Si $n < 0$, $\forall x \in I, u(x) \neq 0$	$nu'u^{n-1}$
e^u		$u'e^u$

Démonstration

Pour la 2^{ème} formule, on a : $(u^n)(x) = (u(x))^n = (v \circ u)(x)$ avec $v(x) = x^n$.

Donc $(u^n)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$, car $v'(x) = nx^{n-1}$.

Soit $(u^n)'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

Les deux autres formules se démontrent de manière analogue.

Exemple 1

f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$. Déterminer $f'(x)$.

• $f = \sqrt{u}$, avec $\forall x \in]1; +\infty[$ $u(x) = x^3 - 1$

• u est dérivable sur I comme fonction polynôme définie sur $]1; +\infty[$

• $\forall x \in]1; +\infty[$ $x^3 > 1$, donc $x^3 - 1 > 0$, donc $u(x) > 0$

• Donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Donc $\forall x \in]1; +\infty[$ $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$

Exemple 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x^2 - 2x + 1)^4$. Déterminer $g'(x)$.

- $g = u^4$, avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 3x^2 - 2x + 1$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$
- Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = 4 \times u' \times u^3$
- Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4 \times (6x - 2) \times (3x^2 - 2x + 1)^3$

Exemple 3

h est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{(x^3 - 1)^2}$. Déterminer $h'(x)$.

- $h = u^{-2}$, avec $\forall x \in]1; +\infty[$, $u(x) = x^3 - 1$
- u est dérivable sur $]1; +\infty[$, comme fonction polynôme définie sur $]1; +\infty[$
- $\forall x \in]1; +\infty[$, $x^3 \neq 1$, donc $x^3 - 1 \neq 0$, donc $u(x) \neq 0$
- Donc h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $h' = -2u' \times u^{-3}$
- Donc $\forall x \in]1; +\infty[$, $h'(x) = -2 \times 3x^2 \times (x^3 - 1)^{-3}$
- $h'(x) = -6x^2 \times \frac{1}{(x^3 - 1)^3}$
- $h'(x) = \frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^3}$

Exemple 4

k est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$. Déterminer $k'(x)$.

- $k = 2e^u$, avec $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $u(x) = \frac{1}{x}$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ (fonction inverse).
- Donc k est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et $k' = 2u'e^u$
- Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $k'(x) = 2 \times \frac{-1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$
- $k'(x) = \frac{-2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

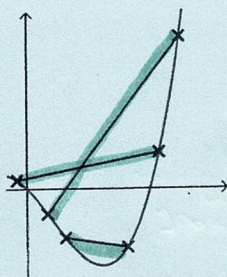
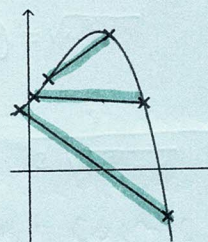
III- FONCTIONS CONVEXES

Définitions

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Dire que f est **convexe sur I** signifie que, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est **au-dessus** de la courbe $\mathcal{C}$ entre A et B .
2. Dire que f est **concave sur I** signifie que, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}$ entre A et B .

Illustration graphique

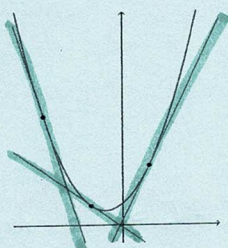
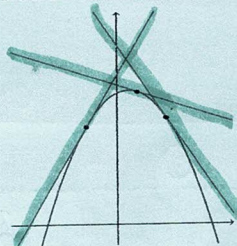
Fonction convexe sur I Fonction concave sur I 

Propriétés (admisses) : cas d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est **convexe sur I** si, et seulement si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est **entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes**.
2. f est **concave sur I** si, et seulement si, sur l'intervalle I , sa courbe représentative est **entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes**.

Illustration graphique

Fonction convexe sur I Fonction concave sur I 

Exemples

La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.	La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$.	La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$.	La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

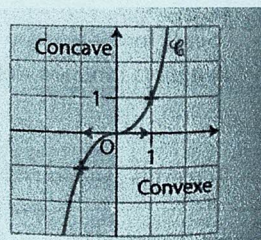
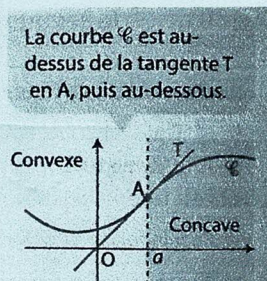
Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I , $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Dire que $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ signifie qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

Remarque

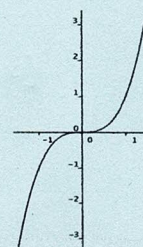
En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f change de convexité : elle passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

**Exemple 1**

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ représentée par la courbe ci-contre.

f est concave sur $]-\infty; 0]$ et f est convexe sur $[0; +\infty[$.

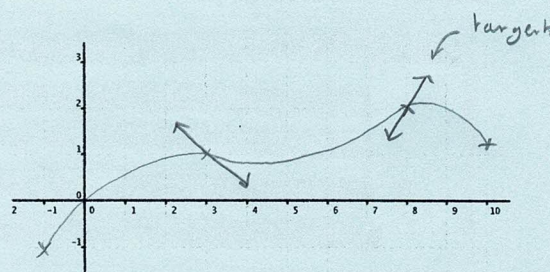
L'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

**Exemple 2**

Soit g une fonction définie et dérivable sur $[-1; 10]$.

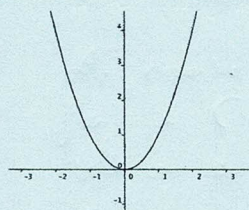
Tracer une courbe $\mathcal{C}$ de g dans le repère ci-contre sachant que :

- g est concave sur $[-1; 3]$ et sur $[8; 10]$;
- g est convexe sur $[3; 8]$;
- $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion de coordonnées $(3; 1)$ et $(8; 2)$.

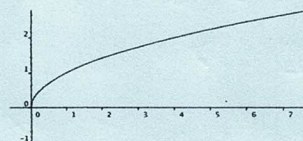
**Propriétés (admisses) : convexité et dérivées**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I .
2. f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I .

Exemples

La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$
et sa dérivée est la fonction affine $x \mapsto 2x$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.



La fonction racine carrée est concave sur $]0; +\infty[$
et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que la dérivée f' est elle-même dérivable sur I .
2. On appelle **fonction dérivée seconde de f sur I** la dérivée de f' , notée f'' .

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$. Déterminer la dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 9x^2 - 10x$
 f' " " " " " " " $f''(x) = 18x - 10$

Propriétés (conséquences) : convexité et dérivées secondes

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

1. f est **convexe sur I** si, et seulement si, f'' est **positive sur I** .
2. f est **concave sur I** si, et seulement si, f'' est **négative sur I** .

Démonstration*

- Démontrons que si f'' est positive sur I , alors la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

Il suffit de montrer que $\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

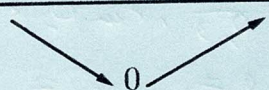
On considère la fonction g définie sur I par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

g est dérivable sur I , comme somme de fonctions dérivables sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or, f'' est positive sur I , donc f' est croissante sur I , donc g' est également croissante sur I .

De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variations de g .

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$

Donc $\forall x \in I, g(x) \geq 0$.

Donc $\forall x \in I, f(x) - f'(a)(x - a) - f(a) \geq 0$.

Donc $\forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

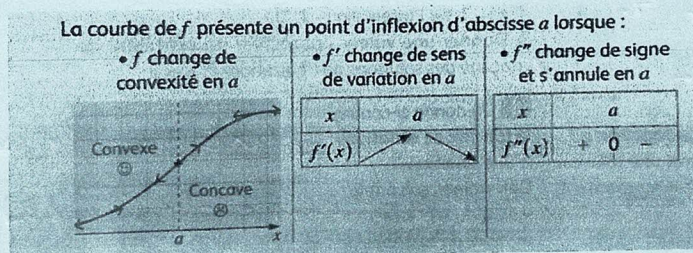
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I .

- Démonstration analogue pour prouver que si f'' est négative sur I , alors la courbe de f est en-dessous de ses tangentes.

Propriété (admise) : point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Illustration graphique d'un cas

Exemple 1 Étudier et utiliser la convexité d'une fonction

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4.$$

1. À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C et en déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2. Démontrer ces résultats.
3. Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) Conjectures : La fonction f semble concave sur $[0; 6]$ et convexe sur $[6; 10]$. La courbe de la fonction C semble avoir un point d'inflexion en 6.

2) Étudions la convexité sur $[0; 10]$:

C est dérivable sur $[0; 10]$ (car fonction polynôme définie sur $[0; 10]$)

$$\forall x \in [0; 10] \quad C'(x) = 0,15x^2 - 2,1x + 8$$

C est dérivable sur $[0; 10]$ " " " " " " " " " " " "

$$\forall x \in [0; 10] \quad C''(x) = 0,3x - 2,1$$

Étudions le signe de $C''(x)$ sur $[0; 10]$:

$$C''(x) > 0 \Leftrightarrow 0,3x - 2,1 > 0$$

$$C''(x) > 0 \Leftrightarrow 0,3x > 2,1$$

$$C''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2,1}{0,3}, \text{ car } 0,3 > 0$$

$$C''(x) > 0 \Leftrightarrow 0,7 \text{ soit } 7$$

x	0	7	10
signe de $C''(x)$	-	0	+
convexité de C	C est concave sur $[0; 7]$		C est convexe sur $[7; 10]$

La courbe représentative de la fonction C admet un point d'inflexion en 7.

Remarque : Conjectures validées

3) C est concave sur $[0; 7]$ donc la croissance du coût de fabrication ralentit entre 0 et 7 k clés produites et est convexe sur $[7; 10]$ donc le coût C accélère en 7 k et 10 k clés produites